

Вступительный экзамен на программу магистратуры Сколтеха
«Прикладная вычислительная механика»

Вступительный экзамен на программу магистратуры по прикладной вычислительной механике в Сколтехе проверяет знания абитуриента в области математики и механики на уровне требований механико-математических, физических, инженерных факультетов университетов. Ниже приведены темы, включённые в экзамен, рекомендуемая литература и пробный вариант. Обычно на 3-часовой экзамен дается 10 заданий.

Математика:

- Математический анализ, включая теорему Остроградского-Гаусса, теорему Стокса, кратные интегралы, сходимость рядов и интегралов.
- Линейная алгебра и аналитическая геометрия, включая основные сведения о собственных векторах и собственных значениях, решение линейных систем, базовые матричные разложения.
- Обыкновенные дифференциальные уравнения, включая решение линейных систем, анализ на фазовой плоскости, устойчивость.
- Дифференциальные уравнения в частных производных, включая разделение переменных, метод характеристик, функции Грина, основные свойства уравнения теплопроводности, волнового уравнения и уравнения Лапласа.
- Основы теории функций комплексной переменной, включая теорему о вычетах и вычисление интегралов.
- Численные методы, включая численное интегрирование, интерполяцию, конечно-разностные аппроксимации, неявные/явные методы, согласованность, сходимость, устойчивость.

Механика:

- Механика частиц и абсолютно твердых тел, включая кинематику и динамику вращательного движения, теорию колебаний, столкновение частиц, элементы лагранжевой и гамильтоновой механики.
- Механика жидкостей и упругих деформируемых тел: основные законы механики жидкости и газа, поверхностное натяжение, основы теории упругости, волны в жидкостях и упругих телах.

Необходимые материалы вы найдёте в стандартных учебниках, используемых при обучении высшей математике, теоретической механике и механике сплошных сред на механико-математических, физических или инженерных факультетах вузов. Например, хорошо подойдут следующие учебники:

- (1) В.А. Зорич, Математический анализ, в 2 т., МЦМНО, 2020
- (2) Я.С. Бугров, С.М. Никольский, Высшая математика, в 3 т., Юрайт, 2020.
- (3) Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, в 3 т., 2022.
- (4) В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. МЦМНО, 2018.
- (5) А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Уравнения математической физики. Наука, 2004.
- (6) Д. И. Сивухин, Общий курс физики, Т. 1 - Механика. Физматлит, 2020.
- (7) Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т. 1: Механика, т. 6: Гидродинамика, т.7: Теория упругости. Физматлит, 2021.
- (8) Л.И. Седов, Механика сплошной среды, в 2 томах. 1970.
- (9) Дж. Бетчелор, Введение в динамику жидкости, 1973.

Пробный тест

- (1) Последовательность u_n определяется соотношением $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$ и начальными данными $u_0 = 1$ и $u_1 = 2$. Чему равно значение u_{2023} ?
- (2) Найти приближенное значение интеграла $I = 2023^3 \int_0^1 x^{2023} \ln\left(1 + \frac{x}{2023}\right) dx$.
- (3) Вычислить интеграл $I = \oint_C f(z) dz$ от комплексной функции $f = \frac{\cos z}{1+z^2}$, где C - окружность $|z - i| = 1$.
- (4) Дана конечно-разностная формула для аппроксимации производной функции $y(x)$ с вторым порядком точности на однородной сетке с размером h :

$$(y')_i = \frac{ay_i + by_{i+1} + cy_{i+2}}{h} + O(h^2).$$

Определить коэффициенты a , b и c .

- (5) Матрица A размером 3×3 удовлетворяет уравнению $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I = 0$, где I и 0 единичная и нулевая матрицы. Чему равен след A ?
- (6) Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2020 & 2 & 0 \\ 2 & 2021 & 2 \\ 0 & 2 & 2022 \end{bmatrix}$ и вектора $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, выбрать наиболее вероятное направление вектора $x = A^{2020}b$?
- (7) Функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных $u_t + tu_x = u$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, с начальным условием $u(x, 0) = 1/(1+x^2)$. Найти $u(0, 1)$.
- (8) Частица, движущаяся в некотором потенциальном поле, имеет лагранжиан $L = \dot{x}^2 + x^2 e^{-x}$. Определить положение устойчивого равновесия и частоту малых колебаний ω около этого положения. В ответе указать значение ω .
- (9) Струя воды вытекает из вертикальной трубки с внутренним диаметром d_0 со скоростью $v_0 = \sqrt{gd_0}$, где g – ускорение свободного падения. Определить диаметр струи d относительно d_0 , то есть, d/d_0 , на расстоянии $z = 7.5d_0$ от конца трубки. Поверхностным натяжением пренебречь.
- (10) Тензоры напряжений и деформаций, σ и ϵ , некоторого изотропного материала связаны следующим образом: $\sigma_{ij} = 3\epsilon_{ij} + 4\epsilon_{kk}\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Чему равно ϵ_{kk} , если $\sigma_{ii} = 1$?